REZIME RADA

Predmet istraživanja ovog magistarskog rada je Riemannova zeta funkcija, jedna od najviše proučavanih i najznačajnijih specijalnih funkcija u matematici. Rad se sastoji iz šest poglavlja.

U radu su najprije navedeni neki osnovni rezultati iz teorije brojeva i kompleksne analize koji su korišteni u narednim poglavljima.

Nakon toga dolazi se do definisanja Riemannove zeta funkcije. Riemannova osnovna ideja bila je da proširi Eulerovu zeta funkciju $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, koja je definisana za $s>1$, na kompleksne varijable s. Na taj način dolazimo do Riemannove zeta funkcije $\zeta(s)$, pri čemu za kompleksnu varijablu koristimo $s=\sigma+it,\ \sigma,t\in R.$ Euler je bio prvi koji je uočio vezu između zeta funkcije i prostih brojeva. Za $\sigma>1$ se lako pokazuje da vrijedi $\zeta(s)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}.$

Riemannova zeta funkcija je konvergentna za $\sigma>1$. Najvažniji razlog zašto zeta funkciju $\zeta(s)$ posmatramo kao funkciju kompleksne varijable je u tome što nam to omogućuje da definišemo funkciju i izvan područja konvergencije reda. Funkciju $\zeta(s)$ možemo analitički produžiti na kompleksnu ravan $C\setminus\{1\}$.

Interesantno pitanje je nalaženje nula ove funkcije. Ispituju se osnovni rezultati vezani za nule Riemannove zeta funkcije. Na osnovu funkcionalne jednačine koju ova funkcija zadovoljava $\zeta(s)=\chi(s)\zeta(1-s)$, vidljivo je da zeta funkcija ima nule za sve negativne parne brojeve $s=-2,-4,-6,\ldots$. Ovo su tzv. trivijalne nule. Međutim, od posebne važnosti su sve druge nule, tzv. netrivijalne nule. Riemann je dokazao da svaka netrivijalna nula mora ležati u kritičnom području $0\le\sigma\le1$, a pretpostavio je da leže na kritičnoj liniji $\sigma=\frac{1}{2}$.

Pokazuje se da postoji tijesna veza između Riemannove zeta funkcije i distribucije prostih brojeva, što je u radu detaljno obrađeno. Sa $\pi(x)$ se označava broj prostih brojeva p takvih da je $p\le x$. O asimptotskom ponašanju funkcije $\pi(x)$ govori Teorem o prostim brojevima koji tvrdi da je $\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}$. Naime, Teorem o prostim brojevima je, kao što će biti dokazano, ekvivalentan sa činjenicom da ne postoje nule zeta funkcije $\zeta(s)$ na pravoj $\sigma=1$.

Jedan od najpoznatijih, još uvijek neriješenih problema u matematici je Riemannova hipoteza, koja se iskazuje preko $\zeta(s)$ funkcije. U ovom radu je iskazano tvrđenje Riemannove hipoteze, a zatim i neke njene ekvivalentne formulacije, kao i posljedice Riemannove hipoteze i njenih proširenja. Riemann je provjerio ispravnost hipoteze za prvih nekoliko nula, a do sada je Riemannova hipoteza provjerena za više od 10 triliona nula.

Ovaj problem matematičari pokušavaju riješiti već preko 150 godina, tako da predstavlja izazov i sadašnjim i budućim generacijama matematičara.